Дистанционная школа для школьников-исследователей МГТУ им. Н.Э. Баумана
«НАУЧНЫЕ КАДРЫ БУДУЩЕГО»
Первый курс обучения, первый поток 2013-2014 гг.

Четвертое дисциплинарное задание
МАТЕМАТИКА

Задачи для учащихся 9-го класса

1. Два каменщика выложили стену за 14 дней, причём второй присоединился к первому через 3 дня после начала работы. Известно, что первому каменщику на выполнение всей работы потребовалось бы на 6 дней больше, чем второму. За сколько дней мог бы выложить эту стену каждый каменщик, работая отдельно? *(8 баллов)*
2. Решить уравнение: $x^2-x-3\sqrt{5}=7$. *(8 баллов)*
3. Упростить выражение на области допустимых значений переменных:
$$\frac{\left(pq^{-1}+p^{-1}q+1\right)\left(p^{-1}-q^{-1}\right)^2}{p^2q^{-2}+p^{-2}q^2-\left(pq^{-1}+p^{-1}q\right)}-\left(\frac{pq}{1-p^2}\right)^{-1}.$$ *(8 баллов)*
4. Решить уравнение: $\dfrac{4x^2-6}{x^2+2}-\dfrac{x^2}{x^2+1}=\dfrac{9}{x^4+3x^2+2}$. *(8 баллов)*
5. Найти множество значений переменной, при которых определено выражение:
$$\frac{\sqrt{\left(x+1\right)^2-x^2-6}+1}{\sqrt{8-3x}}-\frac{\left|12x+31\right|}{12x-31}+\frac{\sqrt{x}}{7x-22}.$$ *(10 баллов)*
6. Составить квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корни которого равны $t_1=2x_1+3x_2$ и $t_2=3x_1+2x_2$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $4x^2+5x-3=0$. *(10 баллов)*
7. Две прямые, параллельные стороне AB треугольника ABC, делят сторону AC в отношении 2:3:2. Найдите площади полученных частей треугольника, если площадь данного треугольника равна 98 см^2. *(12 баллов)*
8. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота из вершины C прямого угла. На этой высоте как на диаметре построена окружность. Известно, что эта окружность высекает на катетах отрезки, равные 12 и 18. Найдите катеты треугольника ABC. *(12 баллов)*
9. При каких значениях параметра k уравнение $kx^2+\left(2k-1\right)x+k-2=0$ имеет два различных корня? *(12 баллов)*
10. Из точки M, расположенной вне окружности на расстоянии $\sqrt{7}$ от центра, проведена секущая, внутренняя часть которой вдвое меньше внешней и равна радиусу окружности. Найдите радиус окружности. *(12 баллов)*

Задачи для учащихся 10-го класса

1. Решите неравенство: $\left(x-1\right)\sqrt{4-x^2}\le 0$ *(8 баллов)*
2. Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что $\sin\alpha=\dfrac{1}{7},\ \dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. *(8 баллов)*
3. Из 12 учащихся нужно отобрать по одному человеку для участия в окружных олимпиадах по математике, физике и информатике. Каждый из учащихся участвует только в одной олимпиаде. Сколькими способами это можно сделать? *(8 баллов)*
4. Диаметр основания цилиндра равен 1 м, высота цилиндра равна длине окружности основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра. *(8 баллов)*
5. Бассейн наполняется водой из труб за 3 часа 45 минут. Если бассейн заполнить наполовину, открыв только первую трубу, а оставшуюся часть – открыв только вторую, то на это потребуется 8 часов. За какое время наполнит бассейн каждая из труб в отдельности? *(10 баллов)*

Дистанционная школа для школьников-исследователей МГТУ им. Н.Э. Баумана
«НАУЧНЫЕ КАДРЫ БУДУЩЕГО»
Первый курс обучения, первый поток 2013-2014 гг.

Четвертое дисциплинарное задание
МАТЕМАТИКА

6. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \dfrac{(2x-11)(3x+7)}{(9-4x)^2} \ge 0 \\ \dfrac{71-24x}{14-5x-x^2} < 5 \end{cases}$ *(10 баллов)*

7. Упростите выражение: $\dfrac{1+\sin\left(\frac{7}{2}\pi-\alpha\right)+\cos 2(\alpha-\pi)}{\sin 2\alpha-\sin(\pi-\alpha)}$. *(12 баллов)*

8. Упростите выражение: $\left[\left(\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a^2-ab}\sqrt{a}-1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\right]^{-2}-\left[\dfrac{b^2(a-1)}{a^2-a+2-(a+1)}\right]^{-1}$ *(12 баллов)*

9. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C проведены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а $PQ = 2\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC. *(12 баллов)*

10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функций $f(x) = (a-1)x^2 + 2ax + 3a - 2$ совпадает с промежутком $[-2;+\infty)$ (12 баллов)

<u>Задачи для учащихся 11-го класса</u>

1. Решите неравенство: $\dfrac{1}{1-\sqrt{x+1}} \le \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}+1}$. *(8 баллов)*

2. Решите уравнение: $\sin 0{,}8x = \left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 + x^2 - 3$. *(8 баллов)*

3. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \dfrac{-5x}{x^2+4}$ на отрезке $[-6;-1]$. *(8 баллов)*

4. Решите систему уравнений: $\begin{cases} |x-y-1| = 4-x, \\ y = |x+2|-1 \end{cases}$. *(8 баллов)*

5. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 4, а высота 8. Найдите угол между прямыми BD и AD_1. *(10 баллов)*

6. Решите уравнение: $\dfrac{\cos x\cdot\left(3\sqrt{2}-2\cos x\right)-2\sin x\cdot\cos x-1}{\sin 2x-1} = -1$. *(10 баллов)*

7. Найдите площадь треугольника, образованного осью ординат и двумя касательными к графику функции $f(x) = 6x + x^2$ в точке минимума функции и в точке с абсциссой (-2). *(12 баллов)*

8. Найдите множество значений функции: $y = \dfrac{9}{\pi}\arccos\dfrac{3\sqrt{2}+\sin x-\cos x}{4\sqrt{2}}$. *(12 баллов)*

9. При каком значении параметра a неравенство $\left(x^2-(a+8)x-6a^2+24a\right)\cdot\sqrt{3-x} \le 0$ имеет единственное решение? *(12 баллов)*

10. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AC = 4\sqrt{3}$ и углом C, равным 30°. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, которая проходит через центр грани AA_1B_1B, пересекает ребро AC в точке N, так что $AN = 2NC$ и параллельна ребру BC, если расстояние от прямой BC до секущей плоскости равно 1. *(12 баллов)*